【整数に関する一考察： mod 9の世界では、素数も非素数も何と美しいことか！ 】

千々松　健

1） **3の倍数以外の整数の6乗≡1（mod 9） 注1**　＜整数を累乗した数を、9を法とするモジュラー算術で計算すると、最大6乗毎に循環が見られる。また、3を除く素数を6乗するとmod9では1となる。＞

3の倍数の整数の累乗≡0（mod 9） 但し、整数は3と6を除き、累乗数は2以上の場合。

2） 整数をmod9で処理すると3，6，9以外の数となる。整数の累乗数についても同様である。但し、3と6は除く。

3） 整数をN乗してmod9処理した場合の数列には6種類の循環が見られる。（1、2,4,8,7,5,1、4,7,1、5,7,8,4,2,1、7,4,1、8,1） 但し3の倍数は全て0。

素数	2乗	3乗	4乗	5乗	6乗	7乗	素数mod9	二乗数mod9	三乗数mod9	四乗数mod9	五乗数mod9	六乗数mod9	七乗数mod9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	2	4	8	7	5	1	2
3	9	27	81	243	729	2187	3	0	0	0	0	0	0
5	25	125	625	3125	15625	78125	5	7	8	4	2	1	5
7	49	343	2401	16807	117649	823543	7	4	1	7	4	1	7
11	121	1331	14641	161051	1771561	19487171	2	4	8	7	5	1	2
13	169	2197	28561	371293	4826809	62748517	4	7	1	4	7	1	4
17	289	4913	83521	1419857	24137569	410338673	8	1	8	1	8	1	8
19	361	6859	130321	2476099	47045881	893871739	1	1	1	1	1	1	1
							1,2,4,5,7,8	1,4,7	1,8	1,4,7	1,2,4,5,7,8	1	1,2,4,5,7,8

非素数	2乗	3乗	4乗	5乗	6乗	7乗	非素数mod9	二乗数mod9	三乗数mod9	四乗数mod9	五乗数mod9	六乗数mod9	七乗数mod9
4	16	64	256	1024	4096	16384	4	7	1	4	7	1	4
6	36	216	1296	7776	46656	279936	6	0	0	0	0	0	0
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	8	1	8	1	8	1	8
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	0	0	0	0	0	0	0
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	1	1	1	1	1	1	1
12	144	1728	20736	248832	2985984	35831808	3	0	0	0	0	0	0
14	196	2744	38416	537824	7529536	105413504	5	7	8	4	2	1	5
15	225	3375	50625	759375	11390625	170859375	0	0	0	0	0	0	0
16	256	4096	65536	1048576	16777216	268435456	7	4	1	7	4	1	7
18	324	5832	104976	1889568	34012224	612220032	0	0	0	0	0	0	0
							0,1,2,3,4,5,6,7,8	0,1,4,7	0,1,8	0,1,4,7	0,1,2,4,5,7,8	0,1	0,1,2,4,5,7,8

注1　**『オイラーの合同式の定理』**

m>1なる整数で、(a,m)=1のとき

$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

ここでaは自然数、φ(m)はmより小さい自然数の中でmと互いに素なものの個数とする。

2009.12.30初版、2010.11.1改訂版

上記の考察は要するにオイラーの合同式の定理でmを9とした場合に該当していたことになる。

オイラー関数のφ(m)はφ(9)になり、1,2,4,5,7,8の6個となるので

$a^6 \equiv 1 \pmod{9}$

(a,9)=1の条件（互いに素）から　aは3の倍数を除く自然数である。

注2　a≡b(mod m) の意味：mで割った余りという観点から言えば、aとbは同じである、modはモジュラーを表わす。